数学 I 計算力チェック

______年______組______番　名前______________________________

1. $\triangle ABC$ の三辺の長さが $AB = AC = 4,\ BC = 6$ であるという。この三角形の面積を求めよ。（図を書いてみること）

解答

最初に余弦定理を用いて $cosA$ を求める。

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \quad \text{より、} \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

よって、$\cos A = \dfrac{4^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = -\dfrac{1}{8}$

次に $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ から

$$\sin^2 A = 1 - \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$$

$\sin A > 0$ より、$\sin A = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

よって、$\triangle ABC$ の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 3\sqrt{7}$$

別解

最初に余弦定理を用いて $cosB$ を求める。

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos A \quad \text{より、} \cos A = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

よって、$\cos B = \dfrac{4^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \dfrac{3}{4}$

次に $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ から

$$\sin^2 B = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

$\sin B > 0$ より、$\sin B = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

よって、$\triangle ABC$ の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 3\sqrt{7}$$

別解

$\triangle ABC$ の頂点 A から辺 BC に垂線を下ろし、その足を D とする。

このとき $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形であることから、$BD = DC = 3$ となる。

三平方の定理から、$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 7$、$AD > 0$ より $AD = \sqrt{7}$

BC を底辺と見たとき AD が高さに相当するので、$\triangle ABC$ の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

☆　二等辺三角形でなければこの方法は成立しないので推奨はしない。